LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES APLICADA A LA INGENIERÍA E IMPLEMENTADA CON *MATHEMATICA*

A. B. Cabello[1], A. H. Encinas[1], L. Hernández[2], A. Martín[3]

[1] Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca,
E.T.S.I.I. de Béjar, Avda Fernández Ballesteros 2, 37700 Béjar, Salamanca.
Correo-e: {anabelencp, ascen}@usal.es
Tfno: (+34)923408080 Ext: 2223 Fax: (+34)923408127

[2] CSIC, C/ Serrano 144, 28006, Madrid.
Correo-e: luis@iec.csic.es
Tfno: (+34) 915618806 Fax: (+34)914117651

[3] Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca,
E.P.S. de Ávila, C/ Hornos Calero 50, 05003 Ávila.
Correo-e: delrey@usal.es
Tfno: (+34)920353500 Fax: (+34)920353501

RESUMEN

Con este trabajo se pretende ilustrar la utilidad de la diagonalización de matrices en la Ingeniería mediante dos ejemplos; el primero de carácter empresarial y el segundo mecánico. De esta manera, los alumnos adquieren los conocimientos correspondientes a la programación de la asignatura de Álgebra Lineal contextualizados en el marco de la Ingeniería.
Además, y dado el interés que tiene la adquisición de habilidades informáticas en la formación de los ingenieros, se han implementado estos ejemplos con el programa *Mathematica*; lo cual significa la primera aproximación de los alumnos a dicha herramienta informática.

PALABRAS CLAVE: diagonalización de matrices, programa *Mathematica*, Espacio Europeo de Educación Superior.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en el proceso de adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior que propone fundamentar la práctica docente en el aprendizaje, más que en la enseñanza, mediante la utilización de una metodología activa, con una mayor implicación del estudiante y la consideración del profesor como agente creador de entornos de aprendizaje motivadores para los alumnos.

Consideramos que es necesario que los futuros ingenieros adquieran los conocimientos matemáticos contextualizados en el marco de la Ingeniería y que adquieran las habilidades informáticas que serán necesarias en su desarrollo profesional. Para ello, hemos utilizado dos ejercicios, uno de carácter empresarial y otro mecánico, comprobando en ellos la importancia de la diagonalización de matrices, también hemos realizado su implementación con el paquete *Mathematica.*

2. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES. POTENCIA DE UNA MATRIZ.

Enunciado 1: En un país existen tres fábricas de componentes que controlan el mercado de venta de componentes en régimen de oligopolio. A lo largo del tiempo algunos clientes cambian de fábrica por diversas razones: publicidad, precio u otras. Se pretende modelizar y analizar el movimiento del mercado, asumiendo, para simplificar el modelo, que la misma fracción de consumidores cambia de una fábrica a otra durante cada periodo de tiempo, un mes por ejemplo.
Denotando x_0, y_0, z_0 la fracción de mercado controlada por cada fábrica, se tiene que $x_0 + y_0 + z_0 = 1$. Sea N el número fijo de clientes.

Después de un mes las fracciones correspondientes son x_1, y_1, z_1. Suponemos que la primera fábrica ha mantenido una fracción a_{11} de los clientes que tenía, y ha atraído una fracción a_{12} de la segunda y a_{13} de la tercera fábrica. Análogamente se hace para las otras dos fábricas.

Entonces se tiene:

$$x_1 = a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13}\, z_0$$
$$y_1 = a_{21}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23}\, z_0$$
$$z_1 = a_{31}\, x_0 + a_{32}\, y_0 + a_{33}\, z_0$$

Expresado en forma matricial: $X_1 = A\, X_0$

Como hemos supuesto que la misma fracción de clientes cambia de una fábrica a otra durante cada mes, entonces se tiene que $X_{n+1} = A\, X_n$ y, en consecuencia, $X_{n+1} = A^{n+1}\, X_0$

Se comprueba fácilmente que para cualquier índice, $x_n + y_n + z_n = 1$.

En conclusión, el estudio de mercado se traduce, matemáticamente, en calcular potencias de una matriz.
En este contexto es fácil entender la necesidad del estudio de la diagonalización de matrices para calcular la potencia de una matriz.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea $X^t = A\,X$ donde X^t indica la derivada de X y A la matriz asociada al sistema.
Si A es diagonalizable, entonces $A = B\,D\,B^{-1}$ siendo B la matriz de vectores propios y D la matriz diagonal, por lo que el sistema quedará:

$$X' = B\,D\,B^{-1}X \;\text{Þ}\; B^{-1}X' = D\,B^{-1}X \;\text{Þ}\; X_b' = DX_b$$

siendo

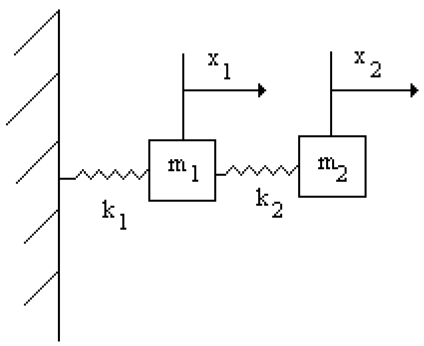
$$X_b' = B^{-1}X'$$
$$X_b = B^{-1}X$$

entonces

$$X = BX_b$$

4. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA LIBRE.

Enunciado 2: Calculad la ecuación del movimiento del siguiente sistema libre de la figura donde m_1= 9*kg*, m_2= 1*kg*, k_1= 24 *N/m*, k_2= 3 *N/m*



Las ecuaciones del sistema son: $m_i \cdot x_i'' = -k_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + k_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i)$

El sistema que hay que resolver es de la forma: $M \,.\, X'' + K \,.\, X = 0$, donde M es la matriz de masa y K la matriz de rigidez.

Multiplicando por M^{-1} nos queda: $X'' + K_r \,.\, X = 0$, con $K_r = M^{-1} K$.

Entonces, como K_r es diagonalizable se tiene $K_r = B\, D\, B^{-1} \Rightarrow X'' + K_r \,.\, X = 0 \Rightarrow X'' + B\, D\, B^{-1}\; X = 0 \Rightarrow B^{-1}\, X'' + D\, B^{-1}$ $X = 0 \Rightarrow\; X_b'' + DX_b = 0$, siendo $\begin{array}{l} X_b'' = B^{-1} X'' \\ X_b = B^{-1} X \end{array}$

Finalmente $X = B\, X_b$

En este caso particular se tiene:

$$\begin{array}{l} 9x_1'' = -24x_1 + 3(x_2 - x_1) \\ x_2'' = -3(x_2 - x_1) \end{array}$$

Es decir:

$$\begin{array}{l} 9x_1'' = -27x_1 + 3x_2 \\ x_2'' = 3x_1 - 3x_2 \end{array}$$

En notación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, $M = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de masa y $K = \begin{pmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ la de rigidez y entonces se tiene que $K_r = M^{-1}K$ = $\begin{pmatrix} 3 & -1/3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Esta matriz es diagonalizable. Los valores propios son 2 y 4 y los vectores propios son (1/3, 1) y (-1/3, 1).

Por tanto la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y el sistema queda de la siguiente manera: $X_b'' + DX_b = 0$ siendo:

$$X_b'' = B^{-1} X'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X''$$

$$X_b = B^{-1}\, X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_{1b}'' \\ x_{2b}'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1b} \\ x_{2b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{1b}'' + 2x_{1b} = 0 \\ x_{2b}'' + 4x_{2b} = 0 \end{cases}$$

La solución que da el paquete *Mathematica* es

$$x_{1b}(t) = C_1 Cos(\sqrt{2}t) + C_3 \frac{Sen(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}$$

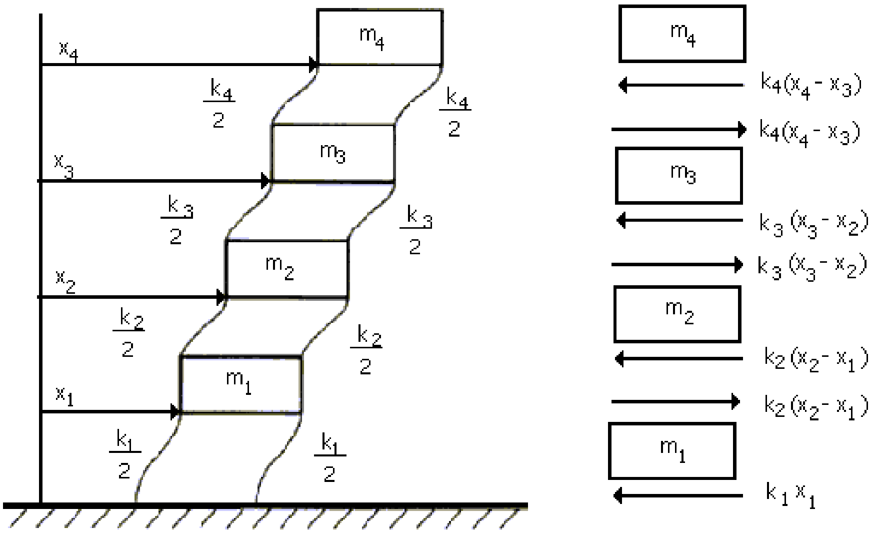
$$x_{2b}(t) = C_2 Cos(2t) + C_4 \frac{Sen(2t)}{2}$$

La solución de la ecuación de movimiento es $X = B\, X_b$ en este caso es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 Cos(\sqrt{2}t) + C_3\frac{Sen(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \\ C_2 Cos(2t)+C_4\frac{Sen(2t)}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-C_2Cos(2t) - \frac{1}{2}C_4 Sen(2t) + \frac{1}{3}(C_1Cos(\sqrt{2}t)+\frac{C_3Sen(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}) \\ C_2Cos(2t)+C_1Cos(\sqrt{2}t)+\frac{1}{2}C_4Sen(2t)+\frac{C_3Sen(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

5. PROBLEMA DE CUATRO RESORTES Y MASAS.

Enunciado 3 Consideremos un edificio con cuatro plantas en vibración horizontal por la acción del viento. Las características son $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 4000$ *kg* y $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 5000$ *N/m.* Un edificio se puede modelizar suponiendo que las paredes no poseen masa y que la masa se concentra en los suelos de forma que existe una rigidez horizontal. Si así lo hacemos, el problema es equivalente al de cuatro resortes y masas.



Las ecuaciones del sistema son:

$$m_i \cdot x_i'' = -k_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + k_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

El sistema que hay que resolver es de la forma: $M\,X'' + K\,X = 0$, donde M es la matriz de masa y K la matriz de rigidez. Multiplicando por M^{-1} nos queda: $X'' + K_r\,X = 0$

Entonces: $X_b'' + DX_b = 0$ siendo $\begin{matrix} X_b'' = B^{-1}X'' \\ X_b = B^{-1}X \end{matrix}$

Finalmente $X = B\, X_b$

Se haría de forma análoga al caso anterior.

$$M = \begin{pmatrix} 4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4000 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 10000 & -5000 & 0 & 0 \\ -5000 & 10000 & -5000 & 0 \\ 0 & -5000 & 10000 & -5000 \\ 0 & 0 & -5000 & 5000 \end{pmatrix}$$

Entonces: $K_r = M^{-1} K = \begin{pmatrix} 5/2 & -5/4 & 0 & 0 \\ -5/4 & 5/2 & -5/4 & 0 \\ 0 & -5/4 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/4 & 5/4 \end{pmatrix}$

Esta matriz es diagonalizable. Los valores propios son {1.25, 4.41511, 2.93412, 0.150768}.

Y los vectores propios son:

$$(1,1,0,1), (1.87939, 2.87939, -2.53209, 1), (1.53209, -0.532089, -1.3473, 1),$$
$$(0.347296, 0.652704, 0.879385, 1)$$

Con lo cual, la matriz B de cambio de base es:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1.87939 & 1.53209 & 0.347296 \\ -1 & 2.87939 & -0.532089 & 0.652704 \\ 0 & -2.53209 & -1.3473 & 0.879385 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal es:

$$D = \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.41511 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.93412 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.150768 \end{pmatrix}$$

El sistema que tenemos que resolver es, en este caso: $X_b'' + DX_b = 0$

$$\begin{pmatrix} x_{1b}'' \\ x_{2b}'' \\ x_{3b}'' \\ x_{4b}'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.41511 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.93412 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.150768 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1b} \\ x_{2b} \\ x_{3b} \\ x_{4b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución que da el paquete *Mathematica* es:

$$x_{1b}(t) = C_1.Cos(1.11803t) + 0.894427 \cdot C_5 \cdot Sen(1.11803t)$$
$$x_{2b}(t) = 2.26495 \cdot 10^{-6}(441511 \cdot C_2 \cdot Cos(2.10122t) + 210122 \cdot C_6 \cdot Sen(2.10122t)$$
$$x_{3b}(t) = 0.000095429 \cdot (10479 \cdot C_3 \cdot Cos(1.71293t) + 6117.6 \cdot C_7 \cdot Sen(1.71293t)$$
$$x_{4b}(t) = C_4 \cdot Cos(3.18603t) + 0.313871 \cdot C_8 \cdot Sen(3.18603t)$$

Por tanto, la solución de la ecuación de movimiento $X = B\, X_b$, es:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1.87939 & 1.53209 & 0.347296 \\ -1 & 2.87939 & -0.532089 & 0.652704 \\ 0 & -2.53209 & -1.3473 & 0.879385 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1.Cos(1.11803t) + 0.894427 \cdot C_5 \cdot Sen(1.11803t) \\ 2.26495 \cdot 10^{-6}(441511 \cdot C_2 \cdot Cos(2.10122t) + 210122 \cdot C_6 \cdot Sen(2.10122t) \\ 0.000095429 \cdot (10479 \cdot C_3 \cdot Cos(1.71293t) + 6117.6 \cdot C_7 \cdot Sen(1.71293t) \\ C_4 \cdot Cos(3.18603t) + 0.313871 \cdot C_8 \cdot Sen(3.18603t) \end{pmatrix}$$

Por la complejidad de los resultados, preferimos dejarlo así.

6. CONCLUSIONES

1. Los alumnos ven la aplicación directa de las matemáticas, en este caso de la diagonalización de matrices. Se crea, de esta manera, un entorno de aprendizaje motivador para los alumnos y contextualizado en el marco de la Ingeniería.
2. Por otra parte, adquieren las habilidades informáticas necesarias en su desarrollo profesional; así la práctica docente se centra más en el aprendizaje que en la enseñanza.
3. Finalmente, se logra una mayor implicación del estudiante en la asignatura al entender el carácter instrumental de las matemáticas, que permiten modelizar situaciones relativas a la Ingeniería.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los alumnos de primer curso su dedicación al aprendizaje de la asignatura de “Álgebra Lineal”.

REFERENCIAS

[1] Asensio Sevilla, M.I. et al. “Cálculo Numérico. Planteamiento y resolución de problemas con *Mathematica*”

[2] Bustos Muñoz, M. T. “Teoría de Fundamentos Matemáticos I”

[3] Domínguez Pérez et al. “Álgebra Lineal. Planteamiento y resolución de problemas con *Mathematica*”

[4] Hernández, E. “Álgebra y Geometría”

[5] Hernández Ruipérez, D. “Álgebra Lineal”

[6] Lang, S. “Introducción al Álgebra Lineal”

[7] Rojo, J. “Álgebra Lineal”

[8] Villa, A. “Problemas de Álgebra con esquemas teóricos”

[9] Wolfram, S. “The *Mathematica* book”

[10] Apuntes del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Alcalá (http://apuntes.mat.uah.es). José Enrique Morais San Miguel.